Chapitre 5

Transformée de Fourier sur les groupes abéliens finis

Dans ce chapitre A est un groupe abélien fini. En particulier tout le chapitre précédent s'applique à A, et de nombreuses simplifications s'opèrent.

5.1 Définition de la transformée de Fourier

Comme A est abélien, des éléments de la base canonique de $\mathbb{C}[A]$ commutent pour le produit de convolution :

$$\delta_x * \delta_y = \delta_{xy} = \delta_{yx} = \delta_y * \delta_x.$$

On en déduit que $\mathbb{C}[A]$ est commutative et donc qu'elle est égale à son centre :

$$\mathbb{C}[A] = \mathbb{C}[A]^A$$

On rappelle qu'on a obtenu au chapitre précédent deux bases orthogonales de $\mathbb{C}[A]^A$. La base des fonctions caractéristiques des classes de conjugaisons, et la base formée des caractères de représentations irréductibles. Comme A est abélien, chaque classe de conjugaison est un singleton, donc la base des fonctions caractéristiques de classes de conjugaison n'est rien d'autre que la base canonique des fonctions de Dirac : $(\delta_a)_{a\in A}$. Elle devient orthonormale si on la normalise :

$$(\sqrt{|A|}\delta_a)_{a\in A}.$$

Par ailleurs, comme le groupe est abélien, ses représentations irréductibles sont de dimension 1 : $\mathrm{Irr}(A) = \widehat{A}$. De plus "le caractère d'un caractère est le caractère", c'est à dire si $\mu \in \widehat{A}$, on a $\chi_\mu = \mu$. Donc $\mathbb{C}[A]$ admet pour seconde base orthonormée

$$(\chi)_{\chi\in\widehat{A}}.$$

En comparant les cardinaux de ces deux bases on obtient

$$|\widehat{A}| = |A|.$$

Si $f \in \mathbb{C}[A]$, alors

$$f = \sum_{\chi\in\widehat{A}} \langle f, \chi\rangle_A \chi,$$

où

$$\langle f, \chi\rangle_A = \frac{1}{|A|}\sum_{a\in A} f(a)\overline{\chi(a)} = \frac{1}{|A|}\sum_{a\in A} f(a)\chi(a)^{-1}.$$

On pose alors

$$\widehat{f}(\chi) = \sqrt{|A|}\langle f, \chi\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{|A|}} \sum_{a\in A} f(a)\chi(a)^{-1}.$$

Ceci définit une fonction $\widehat{f} \in \mathbb{C}[\widehat{A}]$.

$$\begin{array}{rccc} \widehat{f}: & \widehat{A} & \to & \mathbb{C} \\ & \chi & \mapsto & \sqrt{|A|}\langle f, \chi\rangle_A. \end{array}$$

On appelle $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de f.

Clairement l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}_A: & \mathbb{C}[A] & \to & \mathbb{C}[\widehat{A}] \\ & f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}$$

est une application linéaire.

5.2 Premières propriétés

Par définition, si $\chi \in \widehat{A} \subset \mathbb{C}[A]$, on a $\widehat{\chi}(\chi) = \sqrt{|A|}$ et $\widehat{\chi}(\chi') = 0$ si $\chi' \neq \chi$, autrement dit

$$\widehat{\chi} = \sqrt{|A|}\delta_\chi = \sqrt{|\widehat{A}|}\delta_\chi \in \mathbb{C}[\widehat{A}]. \tag{5.1}$$

Cette formule implique que $\mathcal{F}_A$ est une application linéaire qui envoie une base orthonormée de $\mathbb{C}[A]$ sur une base orthonormée de $\mathbb{C}[\widehat{A}]$. Ainsi :

Théorème 5.2.1. *$\mathcal{F}_A$ est une isométrie bijective entre $\mathbb{C}[A]$ et $\mathbb{C}[\widehat{A}]$, en particulier pour f et g dans $\mathbb{C}[A]$, on a :*

$$\langle f, g\rangle_A = \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle_{\widehat{A}}.$$

En prenant $f = g$ et comme $|A| = |\widehat{A}|$ on obtient la formule de Parseval :

$$\sum_{a\in A} |f(a)|^2 = \sum_{\chi\in\widehat{A}} |\widehat{f}(\chi)|^2. \tag{5.2}$$

On peut aussi calculer $\widehat{\delta_a}$ pour $a \in A$, et on trouve

$$\widehat{\delta_a}(\chi) = \frac{1}{\sqrt{|A|}}\chi(a)^{-1} \tag{5.3}$$

pour $\chi \in \widehat{A}$. De cette formule on déduit.

Proposition 5.2.1. *Si $f,\ g \in \mathbb{C}[A]$ et $\chi \in \widehat{A}$, alors*

$$\widehat{f * g}(\chi) = \sqrt{|A|}\widehat{f}(\chi)\widehat{g}(\chi).$$

Démonstration. L'application $f \mapsto \widehat{f}$ étant cairement linéaire, les deux côtés de l'égalité à démontrer sont bilinéaires en (f, g), il suffit donc de les démontrer pour $f = \delta_a$ et $g = \delta_b$ avec a et b dans A. On a alors

$$\widehat{\delta_a * \delta_b}(\chi) = \widehat{\delta_{ab}}(\chi) = \frac{1}{\sqrt{|A|}}\chi(ab)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{|A|}}\chi(a)^{-1}\chi(b)^{-1}$$

alors que

$$\widehat{\delta_a}(\chi)\widehat{\delta_b}(\chi) = \frac{1}{|A|}\chi(a)^{-1}\chi(b)^{-1}.$$

□

5.3 Inversion de Fourier

Comme $\widehat{A} \simeq A$, on a aussi $\widehat{\widehat{A}} \simeq \widehat{A} \simeq A$. En fait $\widehat{\widehat{A}}$ est canoniquement isomorphe à A. Pour $a \in A$, on pose :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Ev}_a : & \widehat{A} & \to & \mathbb{C}^\times \\ & \chi & \mapsto & \chi(a) \end{array}.$$

On vérifie immédiatement que $\mathrm{Ev}_a \in \widehat{\widehat{A}}$.

Proposition 5.3.1. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Ev} : & A & \to & \widehat{\widehat{A}} \\ & a & \mapsto & \mathrm{Ev}_a \end{array}$$

est un ismorphisme de groupes.

Démonstration. C'est un morphisme car $\mathrm{Ev}_{ab}(\chi) = \chi(ab) = \chi(a)\chi(b) = \mathrm{Ev}_a(\chi)\mathrm{Ev}_b(\chi)$ pour tout $\chi \in \widehat{A}$ et donc $\mathrm{Ev}_{ab} = \mathrm{Ev}_a.\mathrm{Ev}_b$. De plus si $\mathrm{Ev}_a = \mathbf{1}_{\widehat{A}}$, alors $\chi(a) = 1 = \chi(1)$ pour tout $\chi \in \widehat{A}$, puis comme les $\chi \in \widehat{A}$ forment une base de $\mathbb{C}[A]$ on en déduit que $f(a) = f(1)$ pour toute $f \in \mathbb{C}[A]$. En prenant $f = \delta_1$ on en déduit $a = 1$. Ainsi Ev est un morphisme injectif entre groupes de mêmes cardinaux, c'est donc un isomorphisme. □

On peut maintenant énoncer la formule d'inversion de Fourier.

Théorème 5.3.1. *Soit $f \in \mathbb{C}[A]$ et $a \in A$, alors*

$$\mathcal{F}_{\widehat{A}}(\mathcal{F}_A(f))(\mathrm{Ev}_a) = f(a^{-1}).$$

Démonstration. Par linéarité de $\mathcal{F}_{\widehat{A}}$ et de $\mathcal{F}_A$ il suffit de démontrer cette égalité pour $f = \chi$ avec $\chi \in \widehat{A}$. Alors $\mathcal{F}_A(\chi) = \sqrt{|\widehat{A}|}\delta_\chi$ d'après (5.1), puis $\mathcal{F}_{\widehat{A}}(\sqrt{|\widehat{A}|}\delta_\chi)(\mathrm{Ev}_a) = \mathrm{Ev}_a(\chi^{-1}) = \chi(a)^{-1}$ d'après (5.3). □

5.4 Le cas $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n \geq 2$

Dans ce cas on a un isomorphisme naturel entre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ donné par

$$\overline{k} \mapsto \chi_{\overline{k}}$$

où

$$\chi_{\overline{k}} : \overline{l} \mapsto \exp(2ikl\pi/n).$$

En identifiant ces deux groupes via cet isomorphisme, on peut voir $\widehat{f}$ comme une fonction sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $f \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$. Alors sa définition est

$$\mathcal{F}_n(f) = \widehat{f} : \overline{k} \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\overline{l} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} f(\overline{l}) e^{-2ikl\pi/n}.$$

Le théorème 5.2.1 nous dit que $\mathcal{F}$ est une isométrie de $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$ dans lui-même, et la formule de parseval (5.2) devient :

$$\sum_{\overline{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} |f(\overline{k})|^2 = \sum_{\overline{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} |\widehat{f}(\overline{k})|^2.$$

Le théorème d'inversion de Fourier (théorème 5.3.1) devient :

$$\mathcal{F}_n(\mathcal{F}_n(f))(\overline{k}) = \widehat{\widehat{f}}(\overline{k}) = f(-\overline{k})$$

pour $\overline{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Il découle de la classification des groups abéliens finis que $\widehat{A} \simeq A$ de manière non canonique. En effet

$$A \simeq (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/n_d\mathbb{Z}),$$

et donc

$$\widehat{A} \simeq \widehat{\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}} \times \cdots \times \widehat{\mathbb{Z}/n_d\mathbb{Z}} \simeq (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/n_d\mathbb{Z}).$$

On peut généraliser ce qu'on vient d'expliquer pour $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ grâce à un tel isomorphisme.