ALGÈBRE AVANCÉE, 2020-2021

Nadir Matringe

Chapitre 1

Algèbre multilinéaire

1.1 Caractéristique d'un corps

Soit $\mathbb{F}$ un corps. On a une application naturelle

$$\begin{array}{rcccl} i & : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{F} \\ & & n & \mapsto & n.1_{\mathbb{F}} \end{array}$$

qui est un morphisme d'anneau. Son noyau $\mathrm{Ker}(i)$ est idéal de $\mathbb{Z}$, il est donc de la forme

$$\mathrm{Ker}(i) = c\mathbb{Z}$$

pour $c \in \mathbb{N}$. On en déduit par passage au quotient un morphisme injectif d'anneau

$$\begin{array}{rcccl} \bar{i} & : & \mathbb{Z}/c\mathbb{Z} & \to & \mathbb{F} \\ & & \overline{n} & \mapsto & i(n) = n.1_{\mathbb{F}} \end{array},$$

ainsi $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$ s'identifie au sous-anneau $\mathrm{Im}(\bar{i}) = \mathrm{Im}(i)$ de $\mathbb{F}$, en particulier il est intègre. Ceci implique que c est soit nul, auquel cas i est injectif et $\mathbb{F}$ contient $\mathbb{Z}$ (identifié à $\mathrm{Im}(i)$), donc il contient son corps des fractions $\mathbb{Q}$, ou bien que c est un nombre premier $p \in \mathcal{P}$ (où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers), auquel cas $\mathbb{F}$ contient le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. L'entier c s'appelle la caractéristique de $\mathbb{F}$ et on le notera $\mathrm{car}(\mathbb{F})$. On vient de démontrer :

Proposition 1.1.1. *La caractéristique de $\mathbb{F}$ est soit nulle, soit un nombre premier. Si $\mathrm{car}(\mathbb{F}) = \{0\}$ alors $\mathbb{F}$ est une extension de $\mathbb{Q}$ (par exemple $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Si $\mathrm{car}(\mathbb{F}) = p \in \mathcal{P}$, alors $\mathbb{F}$ est une extension de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (par exemple n'importe quel corps fini $\mathbb{F}_q$ avec q une puissance de p).*

1.2 Formes multilinéaires

Définition 1.2.1. *Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel et $n \geq 1$, on dit que*

$$\phi : V^n \to \mathbb{F}$$

est une forme multilinéaire (ou n-linéaire) si pour tout $i = 1, \ldots, n$ et tout

$$x^i = (v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

dans V^{n-1}, l'application

$$\phi_{x^i} : v \mapsto \phi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

de V dans $\mathbb{F}$ est linéaire.

Notation 1.2.1. *On note* $\mathrm{Mult}^n(V)$ *l'ensemble des formes multilinéaires de* V^n *dans* $\mathbb{F}$*, c'est un* $\mathbb{F}$*-espace vectoriel pour les lois évidentes.*

En particulier si ϕ est multilinéaire on a pour $I_1, \ldots, I_n$ des ensembles d'indices finis disjoints :

$$\phi(\sum_{i_1 \in I_1} \lambda_{i_1} v_{i_1}, \ldots, \sum_{i_n \in I_n} \lambda_{i_n} v_{i_n}) = \sum_{(i_1,\ldots,i_n) \in I_1 \times \cdots \times I_n} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_n} \phi(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}).$$

La propriété suivante en découle, elle est fondamentale :

Soit $(e_1, \ldots, e_d)$ **une base de** V**. Deux applications** f **et** g **dans** $\mathrm{Mult}^n(V)$ **sont égales si et seulement si**

$$f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = g(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$$

pour $(i_1, \ldots, i_n) \in [1, d]^n$**.**

Exemple 1.2.1. *L'application "produit" de* $\mathbb{F}^n$ *dans* $\mathbb{F}$ *définie par*

$$\pi(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

est une forme multilinéaire.

Exemple 1.2.2. *Si* $V = \mathbb{F}^n$*, pour* $x = (v_1, \ldots, v_n)$ *dans* V^n *on pose*

$$M(x) = (v_1 | \ldots | v_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}).$$

Alors l'application

$$\mathrm{Det} : (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \det(M(x))$$

est une forme multilinéaire.

Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ et $\epsilon : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\} \subset \mathbb{F}^*$ le morphisme signature. Pour σ dans $\mathfrak{S}_n$, dans l'exemple 1.2.1, on constate que

$$\pi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \pi(x_1, \ldots, x_n),$$

on dira que π est symétrique, dans l'exemple 1.2.2 on a

$$\mathrm{Det}(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)\mathrm{Det}(v_1, \ldots, v_n),$$

on dira que Det est antisymétrique.

Définition 1.2.2. *Soit* V *un* $\mathbb{F}$*-espace vectoriel,* $n \geq 1$*, et* $\phi : V^n \to \mathbb{F}$ *est une forme multilinéaire. Si pour tout* $(v_1, \ldots, v_n)$ *dans* V^n *et* σ *dans* $\mathfrak{S}_n$ *on a*

$$\phi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = \phi(v_1, \ldots, v_n)$$

on dit que ϕ *est* ***symétrique****, et si on a*

$$\phi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)\phi(v_1, \ldots, v_n)$$

on dit que ϕ *est* ***antisymétrique****.*

Soit $(e_1, \ldots, e_d)$ **une base de** V**. Deux applications** f **et** g **dans** $\mathrm{Sym}^n(V)$ **sont égales si et seulement si**

$$f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = g(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$$

pour $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_n \leq d$**.**

(En effet on peut toujours réordonner les indices de manière croissante via l'action d'un élément de $\mathfrak{S}_n$).

Notation 1.2.2. *On note* $\mathrm{Sym}^n(V)$ *le sous-espace vectoriel de* $\mathrm{Mult}^n(V)$ *des formes symétriques et* $\mathrm{Ant}^n(V)$ *le sous-espace vectoriel de* $\mathrm{Mult}^n(V)$ *des formes antisymétriques.*

On remarque puisque les transpositions (qui sont de signature -1) engendrent $\mathfrak{S}_n$, une forme multilinéaire $\phi : V^n \to \mathbb{F}$ est symétrique (resp. antisymétrique) si et seulement si $\phi(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(n)}) = \phi(v_1, \ldots, v_n)$ (resp. $\phi(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(n)}) = -\phi(v_1, \ldots, v_n)$) pour n'importe quelle transposition dans $\mathfrak{S}_n$. Il suffit même de prendre τ de la forme $(i, i+1)$ puisque l'ensemble $\{(i, i+1),\ i = 1, \ldots, n-1\}$ engendre $\mathfrak{S}_n$.

Définition 1.2.3. *On dit qu'une forme multilinéaire* $\phi : V^n \to \mathbb{F}$ *est* ***alternée*** *si* $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 0$ *dès qu'il existe* $i \neq j$ *tels que* $v_i = v_j$*.*

Proposition 1.2.1. *Une forme multilinéaire alternée est toujours antisymétrique.*

Démonstration. Soit $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$. On considère la transposition $\tau = (i, j) \in \mathfrak{S}_n$ avec $i < j$. Alors

$$0 = \phi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i + v_j, \ldots, v_n) =$$

$$\phi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n) + \phi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n)$$

$$+\phi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n) + \phi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n)$$

$$= \phi(v_1, \ldots, v_n) + \phi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n)$$

donc

$$\phi(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(n)}) = -\phi(v_1, \ldots, v_n).$$

□

Soit $(e_1, \ldots, e_d)$ **une base de** V**. Deux applications** f **et** g **dans** $\mathrm{Alt}^n(V)$ **sont égales si et seulement si**

$$f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = g(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$$

pour $1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq d$**.**

(En effet on peut toujours réordonner les indices de manière croissante via l'action d'un élément de $\mathfrak{S}_n$, de plus $f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = g(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = 0$ si deux indices sont égaux).

Attention. *Lorsque* $\mathrm{car}(\mathbb{F}) = 2$ *on constate qu'il n'y a pas de différence entre une forme multilinéaire symétrique et antisymétrique car* $-1 = 1$*. En particulier il existe des formes antisymétriques (ou de manière équivalente symétriques) qui ne sont pas alternées. Par exemple l'application* π *de l'exemple* 1 *est symétrique donc antisymétrique, mais elle n'est clairement pas alternée :* $\pi(1, \ldots, 1) = 1 \neq 0$*.*

Proposition 1.2.2. *Si* $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$*, une forme multilinéaire antisymétrique est alternée.*

Démonstration. Soit $\phi : V^n \to \mathbb{F}$ multilinéaire antisymétrique. Suppposons $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ avec $v_i = v_j$ pour $i < j$. On pose $\tau = (i, j)$. Alors

$$\phi(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(n)}) = -\phi(v_1, \dots, v_n)$$

par antisymétrie mais aussi

$$\phi(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(n)}) = \phi(v_1, \dots, v_n)$$

car $v_i = v_j$, d'où

$$2\phi(v_1, \dots, v_n) = 0$$

et donc

$$\phi(v_1, \dots, v_n) = 0$$

puisque $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$. □

Ainsi si $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$, on a

$$\mathrm{Alt}^n(V) = \mathrm{Ant}^n(V)$$

et on voit immédiatement que

$$\mathrm{Alt}^n(V) \cap \mathrm{Sym}^n(V) = \{0\}$$

c'est à dire que $\mathrm{Alt}^n(V)$ et $\mathrm{Sym}^n(V)$ sont en somme directe dans $\mathrm{Mult}^n(V)$ (sans être nécessairement supplémentaires l'un de l'autre, i.e. en général $\mathrm{Mult}^n(V) \neq \mathrm{Sym}^n(V) \oplus \mathrm{Alt}^n(V)$). Pour $n = 2$ on a $\mathrm{Mult}^2(V) = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Alt}^2(V)$ car tout élément $f \in \mathrm{Mult}^2(V)$ s'écrit $f = f_s + f_a$ avec $f_s(v, w) = \frac{1}{2}[f(v, w) + f(w, v)]$ et $f_a(v, w) = \frac{1}{2}[f(v, w) - f(w, v)]$, de sorte que $f_s \in \mathrm{Sym}^2(V)$ et $f_a \in \mathrm{Alt}^2(V)$.

1.3 Produit tensoriel et extérieur dans le cadre des formes multilinéaires

1.3.1 Formes multilinéaires et produit tensoriel

Soient $f_i \in \mathrm{Mult}^{n_i}(V)$ pour $i = 1, \dots, r$, alors on définit l'application $f_1 \otimes \cdots \otimes f_r$ par

$$\begin{array}{rcccc} f_1 \otimes \cdots \otimes f_r & : & V^{\sum_{i=1}^r n_i} \simeq V^{n_1} \times \cdots \times V^{n_r} & \to & \mathbb{F} \\ & & (w_1, \dots, w_r) & \mapsto & f_1(w_1) \dots f_r(w_r) \end{array}.$$

Il est immédiat que

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_r \in \mathrm{Mult}^{\sum_{i=1}^r n_i}(V).$$

Attention même si $\mathbb{F}$ est commtatif en général

$$f_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(r)} \neq f_1 \otimes \cdots \otimes f_r$$

pour $\sigma \in \mathfrak{S}_r$.

Exemple 1.3.1. *On a défini* $\pi \in \mathrm{Mult}^n(\mathbb{F})$ *dans l'exemple1.2.1. Par définition*

$$\pi = \mathrm{Id}_{\mathbb{F}} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{F}}.$$

Théorème 1.3.1. *Supposons V de dimension d. Soit $(\phi_1, \ldots, \phi_d)$ une base de $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F})$, alors l'ensemble*

$$(\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_n})_{(i_1,\ldots,i_n)\in[1,d]^n}$$

est une base de $\mathrm{Mult}^n(V)$, en particulier

$$\dim(\mathrm{Mult}^n(V)) = \dim(V)^n.$$

De plus si on note $(e_1, \ldots, e_d) \in V^n$ la base duale de $(\phi_1, \ldots, \phi_d)$ et qu'on décompose $f \in \mathrm{Mult}^n(V)$ sous la forme

$$f = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in[1,d]^n} \lambda_{i_1,\ldots,i_n} \phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_n}$$

alors

$$\lambda_{i_1,\ldots,i_n} = f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}).$$

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{Mult}^n(V)$, comparons f à

$$g = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in[1,d]^n} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) \phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_n}.$$

Par propriété des bases duales on a

$$\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_n}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) = \prod_{i=1}^{n} \delta_{i_k}^{j_k} = \delta_{(i_1,\ldots,i_n)}^{(j_1,\ldots,j_n)}$$

et on en déduit que

$$g(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) = f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n})$$

donc f et g sont égales. Toutes les assertions de l'énoncé découlent de cette observation. □

Il est immédiat de voir que si f_1, f_2 et f_3 sont des formes multilinéaires sur V^{n_1}, V^{n_2} et V^{n_3} alors $f_1 \otimes (f_2 \otimes f_3) = (f_1 \otimes f_2) \otimes f_3$.

Exemple 1.3.2. *Si $f \in \mathrm{Mult}^2(V)$ avec V de dimension d. On note $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ la matrice de f dans la base $(e_1, \ldots, e_d)$ de V (i.e. $a_{i,j} = f(e_i, e_j)$). Alors $f = \sum_{i,j=1,\ldots,d} a_{i,j} e_i^* \otimes e_j^*$.*

1.3.2 Formes alternées et produit extérieur

On rappelle que si $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, alors

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)},$$

et que le déterminant est une forme multilinéaire alterné en les colonnes de A.

Définition 1.3.1. *Si $(f_1, \ldots, f_r) \in V^{*r}$ et $(v_1, \ldots, v_r) \in V^r$ on pose*

$$f_1 \wedge \cdots \wedge f_r(v_1, \ldots, v_r) = \det[(f_i(v_j))_{i,j=1,\ldots,r}].$$

Proposition 1.3.1. *Pour $(f_1, \ldots, f_r) \in V^{*r}$ on a $f_1 \wedge \cdots \wedge f_r \in \mathrm{Alt}^r(V)$.*

Démonstration. La multilinéarité découle de la linéarité des f_i et de la multilinéarité du déterminant en ses colonnes. Le caractère alterné découle du caractère alterné du déterminant. □

Notons aussi que si $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ on a pour $(f_1, \ldots, f_r) \in V^{*r}$

$$f_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge f_{\sigma(r)} = \epsilon(\sigma) f_1 \wedge \cdots \wedge f_r$$

et la quantité $f_1 \wedge \cdots \wedge f_r$ est linéaire en chaque variable et alternée dans le sens où elle est nulle si $f_i = f_j$ pour $i \neq j$. On a :

Théorème 1.3.2. *Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension $d \geq 1$. Alors $\mathrm{Alt}^r(V) = \{0\}$ si $r > d$, et il est de dimension $\binom{d}{r}$ si $r \leq d$. Si $r \leq d$, soit $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de V et $(e_1^*, \ldots, e_d^*)$ sa base duale. Alors la famille $(e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_r}^*)_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq d}$ est une base de $\mathrm{Alt}^r(V)$, et si $f \in \mathrm{Alt}(V)$ alors*

$$f = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq d} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_r}^*. \tag{1.1}$$

Démonstration. Si $r > d$ et que $f \in \mathrm{Alt}^r(V)$ on a $f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) = 0$ car forcément deux indices i_k et i_l sont égaux pour $k \neq l$ donc f est nulle. Sinon il suffit de montrer la formule 1.1. On remarque que les deux côtés de l'équation sont r-linéaires alternés. Il suffit donc de les comparer sur $(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r})$ pour toute suite $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq d$. Or si $I := 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq d$ est différente de $J := 1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq d$ il existe j_{l_0} qui n'est pas un i_k et la matrice $E_{I,J} = (e_{i_k}^*(e_{j_l}))_{k,l=1,\ldots,r}$ a sa l_0-ème colonne nulle, donc

$$e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_r}^*(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}) = \det(E_{I,J}) = 0.$$

Par contre si $I = J$, alors $E_{I,J} = I_r$ et donc

$$e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_r}^*(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) = \det(E_{I,I}) = 1.$$

La formule en découle. $\square$

On peut alors étendre la définition du produit extérieur.

Définition 1.3.2. *Pour $f \in \mathrm{Alt}^a(V)$, $g \in \mathrm{Alt}^b(V)$ on pose*

$$f \wedge g = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_a \leq n} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_a \leq n} g(e_{i_1}, \ldots, e_{i_a}) f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_b}) e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_a}^* \wedge e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_b}^*.$$

Ainsi

$$f \wedge g \in \mathrm{Alt}^{a+b}(V).$$

On peut vérifier que cette définition ne dépend pas du choix de la base $(e_1, \ldots, e_d)$ et qu'en fait en posant

$$\mathfrak{S}_{a,b} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_{a+b},\ \sigma(1) < \cdots < \sigma(a) \text{ et } \sigma(a+1) < \cdots < \sigma(a+b)\},$$

on a la formule indépendante de $(e_1, \ldots, e_d)$:

$$f \wedge g(v_1, \ldots, v_a, w_{a+1}, \ldots, w_{a+b}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{a,b}} \epsilon(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(a)}) g(w_{\sigma(a+1)}, \ldots, w_{\sigma(a+b)}).$$

On vérifie facilement en utilisant la définition que si f, g et h sont dans $\mathrm{Alt}^a(V)$, $\mathrm{Alt}^b(V)$, $\mathrm{Alt}^c(V)$, alors

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h).$$

Toujours en utilisant la définition la quantité $f \wedge g$ est linéaire en chaque variable et vérifie $g \wedge f = (-)^{ab} f \wedge g$.